УДК 621.396.26

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ *BCJR* АЛГОРИТМІВ ДЕКОДУВАННЯ ЗГОРТАЛЬНИХ КОДІВ

Шпилька О.О., Юрков Ю.О., Жук С.Я.

Найбільшим досягненням в теорії завадостійкого кодування за останні два десятиліття є винайдення турбо-кодів, які все частіше використовуються в нових системах зв'язку. Ці коди відносяться до класу блокових, хоча і будуються на використанні згортальних кодів. В роботі [1] показано, що при збільшенні довжини інформаційного блоку турбо-коду до декількох тисяч біт імовірнісні характеристики наближаються до границі Шенона. Турбо-код утворюється компонуванням двох або більше складових, кожна із яких є послідовністю утвореною систематичним згортальним кодером із інформаційної послідовності, яка пройшла через змішувач. Задача змішувача інформаційної послідовності полягає в тому, щоб в кожний кодер надійшла некорельована версія інформації, в результаті чого відповідні вихідні біти кожного кодера стають незалежними. Для більш повного використання інформації, яка отримується з кожного декодера, алгоритм декодування повинен використовувати «м'яку» схему прийняття рішення. Для турбо-кодів з двома складовими концепція декодування полягає в тому, щоб передати «м'яке» рішення з виходу одного декодера на вхід іншому, який буде використовувати її як апріорну інформацію, і повторювати цю процедуру до тих пір, поки не будуть отримані надійні рішення [2].

Найбільш часто під час декодування турбо-кодів для отримання «м'яких» рішень використовується *BCJR* алгоритм [3], який із-за своєї структури ще називають «вперед-назад» алгоритмом. Він розраховує апостеріорні ймовірності для кожного переданого інформаційного символу отриманого з марківського джерела враховуючи усі отримані на розглянутому інтервалі спостереження. Оцінка переданого символу знаходиться по критерію максимуму апостеріорної ймовірності, що дозволяє мінімізувати ймовірність помилки у прийнятті рішень. Арифметичні затрати на реалізацію «вперед-назад» алгоритму можуть бути зменшені, якщо під час декодування використовувати лише «вперед» частину, як зроблено у роботі [4].

Метою статті є порівняння імовірнісних характеристик «вперед-назад» і «вперед» алгоритмів для декодування згортальних кодів та розрахунок арифметичних витрат для реалізації їх на процесорі ADSP BF-533.

Постановка задачі

Структурна схема системи передачі даних показана на рис.1. На вхід кодера від марківського джерела інформації надходить дискретна інформаційна послідовність символів b_k^j, $j=\overline{1,L}$, де L розмір алфавіту інформаційних символів. Для спрощення будемо вважати, що згортальний кодер

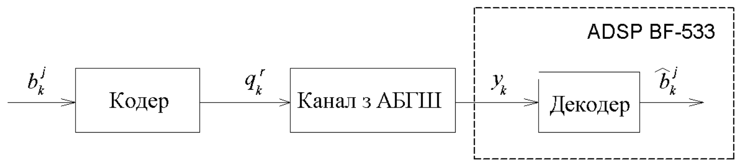

Рис.1

формує символи q_k^r, $r=\overline{1,N}$, N - розмір алфавіту канальних символів, які передаються в канал з АБГШ.

Математична модель процесу вимірювання послідовності символів на вході декодера:

$$y_k = q_k^r + v_k, \qquad (1)$$

де y_k - вимірювання на вході декодера в момент часу k, v_k - некорельована гаусівська послідовність з нульовим математичним сподіванням і дисперсією σ_v^2.

Опис *BCJR* алгоритму

В момент часу k кодер характеризується станом $S_k^n, n=\overline{1,M}$, де M - кількість можливих станів кодера, які залежать від довжини кодового обмеження і алфавіту інформаційних символів [2,3]. Під дією інформаційного символу b_k^j кодер переходить із стану S_k^n в стан S_{k+1}^m формуючи канальний символ q_k^r. Згортальний кодер вносить марківську залежність в послідовність канальних символів q_k^r. Як випливає з (1) канальні символи q_k^r спотворюються завадою v_k. Декодер має формувати оцінки інформаційних символів $\hat{b}_k^j$ по критерію максимуму апостеріорної ймовірності на основі послідовності Y отриманих вимірювань y_k на інтервалі часу $0...T-1$.

Розіб'ємо послідовність вимірювань на три: $Y = Y_{<k} \cup y_k \cup Y_{>k}$, де $Y_{<k}$ - послідовність вимірів на інтервалі часу $0...k-1$; $Y_{>k}$ - послідовність вимірів на інтервалі часу $k+1...T-1$. Тоді апостеріорна ймовірність переходу з стану кодера S_k^n до стану S_{k+1}^m на основі виміряної послідовності Y:

$$P(S_k^n, S_{k+1}^m \mid Y) = p(S_k^n, S_{k+1}^m, Y)/p(Y) = p(S_k^n, S_{k+1}^m, Y_{<k}, y_k, Y_{>k})/p(Y). \qquad (2)$$

Використовуючи теорему множення ймовірностей, (2) можна записати:

$$P(S_k^n, S_{k+1}^m \mid Y) = p(S_k^n, S_{k+1}^m, Y_{<k}, y_k)\, p(Y_{>k} \mid S_k^n, S_{k+1}^m, Y_{<k}, y_k)/p(Y). \qquad (3)$$

Використовуючи теорему множення ймовірностей і марківську властивість, перший множник із (3) можна записати:

$$p(S_k^n, S_{k+1}^m, Y_{<k}, y_k) = p(S_{k+1}^m, y_k \mid S_k^n, Y_{<k})\, p(S_k^n, Y_{<k}) = p(S_{k+1}^m, y_k \mid S_k^n)\, p(S_k^n, Y_{<k}) \qquad (4)$$

Використовуючи марківську властивість, другий множник із (3):

$$p(Y_{>k} \mid S_k^n, S_{k+1}^m, Y_{<k}, y_k) = p(Y_{>k} \mid S_{k+1}^m) \qquad (5)$$

Підставивши (4) і (5) в (3), отримаємо:

$$P(S_k^n, S_{k+1}^m \mid Y) = p(S_k^n, Y_{<k})\, p(S_{k+1}^m, y_k \mid S_k^n)\, p(Y_{>k} \mid S_{k+1}^m)/p(Y)$$

Позначимо множники при розрахунку апостеріорної ймовірності: $\alpha(S_k^n) = p(S_k^n, Y_{<k})$ - сумісна ймовірність того, що вимірювання до $k-1$ моменту часу привели в стан S_k^n; $\gamma(S_k^n, S_{k+1}^m) = p(S_{k+1}^m, y_k \mid S_k^n)$ - ймовірність переходу із стану S_k^n в стан S_{k+1}^m з вимірюванням y_k; $\beta(S_{k+1}^m) = p(Y_{>k} \mid S_{k+1}^m)$ - ймовірність того, що послідовність вимірів, отриманих з $k+1$ моменту часу, формувалась з S_{k+1}^m стану.

Апостеріорна ймовірність переходу із стану S_k^n в стан S_{k+1}^m:

$$P(S_k^n, S_{k+1}^m \mid Y) = \alpha(S_k^n)\gamma(S_k^n, S_{k+1}^m)\beta(S_{k+1}^m) / p(Y), \tag{6}$$

де $p(Y)$ - ймовірність: $p(Y) = \sum_{n=1}^{M}\sum_{m=1}^{M} \alpha(S_k^n)\gamma(S_k^n, S_{k+1}^m)\beta(S_{k+1}^m)$.

Отримавши ймовірності $\alpha(S_k^n)$ і $\beta(S_{k+1}^m)$, значення ймовірностей $\alpha(S_{k+1}^m)$ і $\beta(S_k^n)$ можуть бути отримані рекурсивно за формулами [3,4]:

$$\alpha(S_{k+1}^m) = \sum_{n=1}^{M} \alpha(S_k^n)\gamma(S_k^n, S_{k+1}^m), \tag{7}$$

$$\beta(S_k^n) = \sum_{m=1}^{M} \gamma(S_k^n, S_{k+1}^m)\beta(S_{k+1}^m). \tag{8}$$

Ймовірності α для кожного стану ітеративно розраховуються з початку до кінця блоку прийнятих вимірів, цей розрахунок називають шляхом «вперед». Ймовірності β ітеративно розраховуються з кінця в початок, цей розрахунок називають шляхом «назад». У випадку коли стан кодера на початку і в кінці блоку вимірів невідомий, початкові значення ймовірностей встановлюються як:

$$[\alpha(S_0^1), \ldots, \alpha(S_0^M)] = [1/M, \ldots, 1/M]; \ [\beta(S_{T-1}^1), \ldots, \beta(S_{T-1}^M)] = [1/M, \ldots, 1/M].$$

Ймовірність переходу з стану S_k^n в стан S_{k+1}^m γ для каналу з АБГШ може бути розрахована згідно [3,4]:

$$\gamma(S_k^n, S_{k+1}^m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} \exp\left(-\frac{(y_k - q(S_k^n, S_{k+1}^m))^2}{2\sigma_v^2} \right) \cdot p(b_k^j), \tag{9}$$

де $q(S_k^n, S_{k+1}^m)$ - канальний символ, який є відомою функцією станів кодера S_k^n і S_{k+1}^m; $p(b_k^j)$ - апріорна ймовірність появи в інформаційні послідовності символу b_k^j, який спричинює перехід із стану S_k^n в S_{k+1}^m.

Розглянутий спосіб декодування називають «вперед-назад» алгоритмом, із-за необхідності розраховувати α і β ймовірності. «Вперед» алгоритм для декодування використовує лише ймовірності α [4]. В цьому алгоритмі ймовірності β не використовуються. Апостеріорна ймовірність переходу із стану S_k^n в стан S_{k+1}^m для «вперед» алгоритму визначається як

$$P(S_k^n, S_{k+1}^m \mid Y) = \alpha(S_k^n)\gamma(S_k^n, S_{k+1}^m) / p(Y), \qquad (10)$$

де $p(Y)$ - ймовірність: $p(Y) = \sum_{n=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}\alpha(S_k^n)\gamma(S_k^n, S_{k+1}^m)$.

Після знаходження всіх значень ймовірностей α і β, для кожного можливого переходу із стану S_k^n в стан S_{k+1}^m в будь-який момент часу k з інтервалу $0,...T-1$ можна розрахувати апостеріорну ймовірність (6) для «вперед-назад» алгоритму або (10) для «вперед» алгоритму. Для формування оцінки інформаційного символу $\hat{b}_k^j$ знаходиться максимум суми апостеріорних ймовірностей переходів із стану S_k^n в стан S_{k+1}^m, які можуть відбутися в кодері під дією інформаційного символу b_k^j.

Результати експериментальних досліджень

Алгоритми (6) і (10) перевірені на модельному прикладі для системи зв'язку з 4 позиційною ASK модуляцією $\{-3,-1,1,3\}$. Згортальний кодер з степіню кодування ½, описується векторами зв'язків $g_1 = 7$ і $g_2 = 5$, довжина кодового обмеження 3. Інформаційні символи формувалися рівноймовірно з алфавіту $\{0,1\}$.

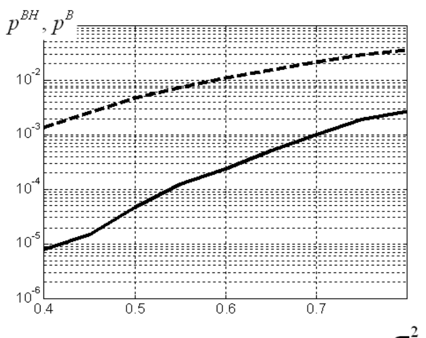

Рис.2

На рис.2 в залежності від дисперсії помилки вимірювання σ_v^2 суцільною лінією зображено ймовірність помилкового прийняття рішення p^{BH} щодо оціненого інформаційного символу b_k^j за допомогою «вперед-назад» алгоритму. Штриховою лінією показана ймовірність помилки прийняття рішення p^{B} для «вперед» алгоритму. Як видно з результатів використання зворотного ходу в алгоритмі «вперед-назад» дозволяє покращити характеристики на один два порядки в порівнянні з «вперед». алгоритмом.

Арифметичні затрати для реалізації «вперед-назад» алгоритму розподіляються для ітеративного розрахунку ймовірностей (7) і (8) та розрахунку ймовірностей (9) для кожного моменту часу k з інтервалу $0,...,T-1$. Розрахунок експоненціальної функції дуже трудомістка операція, тому доцільно завчасно розрахувати всі можливі значення $\gamma(S_k^n, S_{k+1}^m)$ і записати їх у пам'ять. Об'єм пам'яті необхідний для зберігання значень залежить від розрядності АЦП z та кількості можливих станів M. Враховуючи те, що під час згортального кодування перехід у новий стан може відбутися лише із L попередніх станів, затрати на розрахунок можуть бути зменшені. В табл. 1 наведено кількість необхідної пам'яті та операцій множення і додавання потрібних для декодування послідовності прийнятого блоку вимірів Y на інтервалі $0...T-1$.

Таблиця 1

	Додавання	Множення	Пам'ять, біт
$\alpha(S_k^n)$	$T\cdot M\cdot L$	$T\cdot M\cdot L$	$T\cdot M\cdot z$
$\beta(S_{k+1}^m)$	$T\cdot M\cdot L$	$T\cdot M\cdot L$	$T\cdot M\cdot z$
$\gamma(S_k^n, S_{k+1}^m)$	-	-	$M\cdot L\cdot z$

Для знаходження всіх апостеріорних ймовірностей (6) потрібно виконати $2\cdot T\cdot M\cdot L$ операцій множення. Знаходження значення $p(Y)$ і ділення на нього не обов'язкове, це значення являє собою коефіцієнт нормалізації. Далі слід знайти L сум із M/L доданків для кожного виміру з блоку Y, що потребує $T\cdot L\cdot(M/L-1)$ операцій додавання. Щоб знайти максимум із L сум апостеріорної ймовірності потрібно зробити $L-1$ порівняння, для всього блоку вимірів потрібно виконати $T\cdot(L-1)$ порівняння.

Таким чином, «вперед-назад» алгоритм забезпечує кращі імовірнісні характеристики в порівнянні з «вперед» алгоритмом на два порядки, але потребує більших арифметичних затрат. Для реалізації «вперед-назад» алгоритму потрібно: $T(2ML+M-L)$ операцій додавання; $4TML$ операцій множення; $2Mz(T+L)$ біт пам'яті; $T(L-1)$ порівнянь.

Література

1. Berrou C., Glavieux A, Thitimajshima P., "Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo-Codes", Proceedings of ICC'93, Geneva, Switzerland, pp. 1064-1070, May, 1993.

2. Скляр Б.. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Изд. 2-е, испр. : Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104с.

3. Moon Todd K. Error correction coding: mathematical methods and algorithms. 2005 by John Wiley & Sons. ISBN 0-471-64800-0.

4. Hansson A., Chugg K, Tor Aulin "On forward-adaptive versus forward/backward-adaptive SISO algorithm for Rayleigh fading channels", IEEE Com. Letters, v.5, No 12, 2001

Шпилька О.О., Юрков Ю.О., Жук С.Я. ***Порівняльний аналіз BCJR алгоритмів декодування згортальних кодів.*** *Розглянуто BCJR алгоритм декодування згортальних кодів по критерію максиму апостеріорної ймовірності. Проведено порівняння імовірнісних характеристик цього алгоритму з його спрощеним варіантом. Наведено арифметичні затрати для реалізації алгоритму на мікропроцесорі ADSP BF-533.*

Ключові слова*: згортальне кодування, BCJR алгоритм, апостеріорна ймовірность*

Шпилька А.А., Юрков Ю.А., Жук С.Я. ***Сравнительный анализ BCJR алгоритма декодирования сверточных кодов.*** *Рассмотрен BCJR алгоритм декодирования сверточных кодов по критерию максимума апостериорной вероятности. Проведен сравнительный анализ вероятностных характеристик этого алгоритма с его упрощенным вариантом. Приведена вычислительная сложность данного алгоритма при реализации на микропроцессоре ADSP BF-533.*

Ключевые слова*: сверточное кодирование, BCJR алгоритм, апостериорная вероятность.*

Shpylka O.O., Jurkov I.O., Zhuk S.Ya. ***Comparative analysis of BCJR decoding algorithm of convolutional codes****. It is considered BCJR algorithm of convolutional codes by criterion of a maximum posterior probability. Analysis of probabilistic characteristics of this algorithm with its simplified variant is carried out. The computational complexity of the given algorithm for realization on microprocessor ADSP BF-533 is shown.*

Keywords: *convolution coding, BCJR algorithm, a maximum of posterior probability.*